Noi prescinderemo ora dalla considerazione del quadrangolo, che abbiamo fin qui tenuta di vista, e supporremo che la trasformazione sia determinata dalla natura del triangolo fondamentale e da due punti del piano assunti come reciprocamente corrispondenti. Le coordinate di questi punti individuano infatti, per mezzo delle (7), i valori dei rapporti $a^2:b^2:c^2$. Osserveremo anzi che in tale ipotesi si ha una trasformazione più generale della prima, in questo senso che, se le a^2, b^2, e^2 risultassero avere valori negativi, la trasformazione stessa non si potrebbe ottenere da un quadrangolo reale.

Chiamiamo *E, E'* i due punti assunti come corrispondenti, *A, B,* Ci tre vertici del triangolo fondamentale. Le rette *AB, A C, A E, A E'* determinano un'involuzione di cui si possono determinare i raggi doppi (se reali). Altrettanto dicasi delle rette *B C, BA, BE, BE'.* Le quattro intersezioni di questi raggi doppi saranno i quattro vertici del quadrangolo generatore della trasformazione.

La condizione che deve aver luogo affinchè il detto quadrangolo sia intieramente reale è che tutti e tre i lati del triangolo fondamentale, prolungati se occorre, incontrino la retta EE^f nel tratto compreso fra *E* ed £"', o che nessuno di essi la incontri nel detto tratto. Negli altri casi, delle tre involuzioni una sola ha i raggi doppi reali, mentre le altre due li hanno immaginati. Perciò il quadrangolo generatore ha sempre almeno due lati (opposti) reali: ma i suoi vertici o son tutti reali o son tutti immagi-nari. Tutto ciò è una facile conseguenza dei noti criteri relativi alla reciproca disposizione delle coppie di raggi corrispondenti nei fasci in involuzione.

Supponiamo ora dato nel piano un punto F. Il suo corrispondente F' sari pienamente individuato. Per trovarlo si conducano le rette *AF, BF* e si determini il punto d'incontro della sesta retta dell'involuzione *AB, A C, A E, A E', AF* colla sesta retta dell'involuzione *BA, B C, BE, BE', B F.* Questo punto d'incontro sarà il cercato punto F'.

Abbiansi due coppie di punti corrispondenti *E* ed *E', F* ed F'. Conduciamo le rette £F', E^1 *F* che si incontrano nel punto O, e le rette *EF, E'F'* che si incontrano nel punto O'. Otteniamo così un quadrilatero completo i cui lati sono EF^1, *E'F, O'F,* O'F'.

È noto che, tirando da un punto qualunque P le rette che vanno ai sei vertici di questo quadrilatero, si ottiene un fascio in involuzione, i cui raggi corrispondenti sono le tre coppie di rette *PE* e *PE', PF* e PF', *PO* e *PO',* che vanno dal punto P alle tre coppie di vertici opposti del quadrilatero. Se si fa dunque coincidere il punto P successivamente con due vertici del triangolo fondamentale, si vede chiaramente che *O* ed *O'* sono punti corrispondenti.

Da ciò segue che dei sei vertici del quadrilatero completo in discorso, tre situati in linea retta hanno per corrispondenti i tre

rimanenti. Ma i tre primi, appunto per